Exercice 1

A/Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$(1-i)(1-2i)$; $(2-i)^2-(3-2i)(3+2i)$; $\dfrac{5-i}{2i}$; $\dfrac{2}{3i}-\dfrac{3}{1-i}$

B/Ecrire sous forme algébrique :

$a=i^{15}$; $b=i^{18}$; $c=i^6$; $d=(1+i)^4$; $e=(1-i)^8$

Exercice 2

Soit z = 1 – 3 i et z' = – 3 + 2 i

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes suivants.

1. $Z_1=z\times z'$; $Z_2=z^2\times z'$; $Z_3=\dfrac{z-2}{z'+i}$

2. Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes suivants :

$Z_1=\overline{z}\times z'$; $Z_2=z^2\times\overline{z'}$; $Z_3=\dfrac{z-2}{\overline{z'}+i}$

Exercice 3

.Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=-1+i$ et $z_B=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

1. Placer les points A et B.

2. Montrer que les points O, A et B sont alignés.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A=1+i$; $z_B=3+i$ et $z_C=1-2i$

1. a. Calculer $|z_A-z_B|$, $|z_A-z_C|$ et $|z_B-z_C|$

b. En déduire la nature du triangle ABC.

2. Soit I le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

On désigne par z_I l'affixe de I. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z_I.

Exercice 5

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et I d'affixes respectives :
$\mathbf{z}_A = -2i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 4 + 2i$ et $z_I = 2$

1/a) Placer une figure les points A, B, C et I.
b) Vérifier que I est le milieu du segment [AC].

2/a) Calculer les affixes $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$
b) Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle de sommet principal B.

3/Soit D le symétrique de B par rapport au point I.
a) Déterminer l'affixe z_D du point D.
b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

Forme trigonométrique :

Exercice 6

Mettre chaque nombre complexe sous forme trigonométrique.

a) $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$; b) $z_2 = 3 - 3i$

c) $z = (-1 + i)^5$;d) $z = (\sqrt{3} - i)^4$; e)$z = \frac{(\sqrt{2}-1)i}{1-i}$

f) $z = \left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)^6$; g) $\arg(iz) = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$ et $|z| = 2$

Exercice 7

Déterminer le module et un argument de :

1. $z = \frac{1+i}{1-i}$
2. $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$
3. $z = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}$

Exercice 8

Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}; z_2 = 1 + i.$

a) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
b) Mettre $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique et trigonométrique
c) Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 9

Soient les nombres complexes Z= $\sqrt{2}$ -i $\sqrt{6}$ et Z'=1+i

1) Donner la forme trigonométrique de Z et Z'.

2) a) Donner la forme trigonométrique de ZZ'.

b) Déduire les valeurs exactes de cos($\frac{\pi}{12}$) et sin($\frac{\pi}{12}$) .

3) a) Donner la forme trigonométrique de $\frac{Z'}{Z}$.

b) Déduire les valeurs exactes de cos($\frac{7\pi}{12}$) et sin($\frac{7\pi}{12}$) .

Exercice 1

A/

- $(1-i)(1-2i)=1-2i-i-2=-1-3i$
- $(2-i)^2-(3-2i)(3+2i)=(4-4i-1)-(9+4)=-10-4i$
- $\frac{5-i}{2i}=\frac{(5-i)(2i)}{2i(2i)}=\frac{10i+2}{-4}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$
- $\frac{2}{3i}-\frac{3}{1-i}=\frac{2(i)}{3i(i)}-\frac{3(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{-3}-\frac{3+3i}{2}=\frac{-4i-9-9i}{6}=-\frac{3}{2}-\frac{13}{6}i$

B/

$a=i^{15}=i\times(i)^{2^7}=i\times(-1)^7=-i$

$b=i^{18}=(i)^{2^9}=(-1)^9=-1$

$c=i^6=(i)^{2^3}=(-1)^3=-1$

$d=(1+i)^4=(2i)^2=-4$

$e=(1-i)^8=(-2i)^8=(-2)^8(i)^8=256\times1=256$

Exercice 2

1. $Z_1=z\times z'=(1-3i)(-3+2i)=-3+2i+9i+6=3+11i$

$Z_2=z^2\times z'=(1-3i)^2(-3+2i)=(1-6i-9)(-3+2i)=(-8-6i)(-3+2i)=24-16i+18i+12$

$=36+2i$

$$Z_3 = \frac{z-2}{z'+i} = \frac{-1-3i}{-3+3i} = \frac{(-1-3i)(1+i)}{-3(1-i)(1+i)} = \frac{-1-i-3i+3}{-3\times 2} = \frac{2-4i}{-6} = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

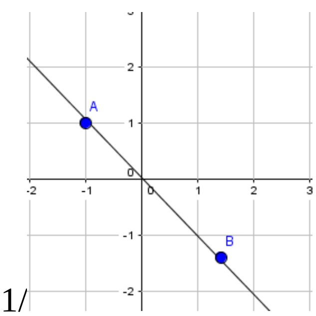
2.

$$Z_1 = \overline{z}\times z' = (1+3i)(-3+2i) = -3+2i-9i-6 = -9-7i$$

$$Z_2 = z^2\times\overline{z'} = (1-3i)^2(-3-2i) = (1-6i-9)(-3-2i) = (-8-6i)(-3-2i) = 24+16i+18i-12$$
$$= 12+34i$$

$$Z_3 = \frac{z-2}{\overline{z'}+i} = \frac{-1-3i}{-3-i} = \frac{(-1-3i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)} = \frac{3-i+9i+3}{9+1} = \frac{6+8i}{10} = \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$

Exercice 3

1/ 

$2/\ \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

On remarque $\overrightarrow{OB} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{OA}$ donc les deux vecteurs sont colinéaires

Alors les points O, A et B sont alignés

Exercice 4

$$|z_A - z_B| = |-2| = 2$$

$$|z_A - z_C| = |3i| = 3$$

$$|z_B - z_C| = |2+3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

2. $AB^2=4$; $AC^2=9$; $BC^2=13$

$AB^2+AC^2=BC^2$ donc ABC est rectangle en A

2. Le point I est le milieu de BC donc $z_I = \frac{z_B+z_C}{2} = \frac{4-i}{2} = 2-\frac{1}{2}i$

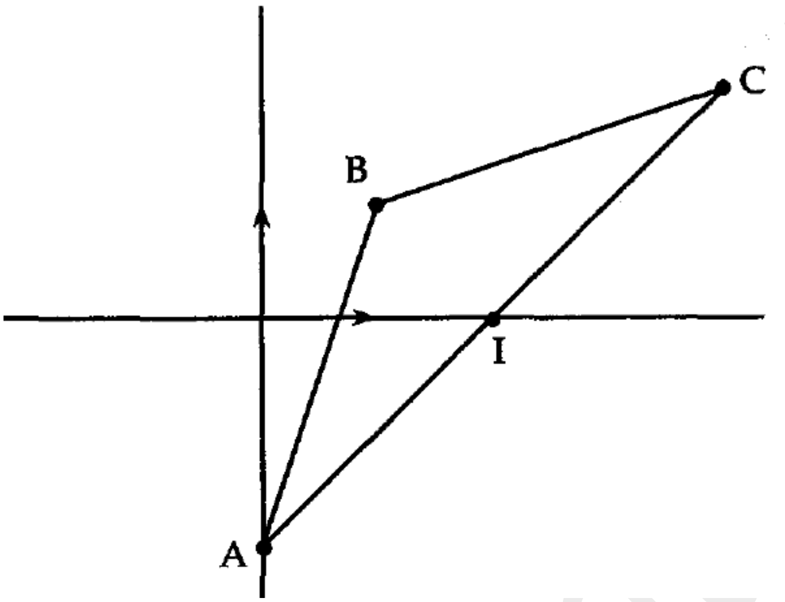
Exercice 5

1/1a) $z_A = -2i$ donc $A(0,-2)$

$z_B = 1 + i$ donc $B(1,1)$

$z_C = 4 + 2i$ donc $C(4,2)$

$z_I = 2$ donc $I(2,0)$



b) $\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{-2i+4+2i}{2} = \frac{4}{2} = 2 = z_I$ donc I est le milieu de [AC]

2) a)

$$u = \text{aff}(\overrightarrow{BA}) = z_A - z_B = (-2i) - (1+i) = -1 - 3i$$
$$u' = \text{aff}(\overrightarrow{BC}) = z_C - z_B = (4+2i) - (1+i) = 3 + i$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} BA = |z_A - z_B| = |-1-3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \\ BC = |z_C - z_B| = |3+i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \end{array}\right\} \Rightarrow BA = BC = \sqrt{10} \text{ donc le triangle ABC est isocèle}$$

de sommet principal B.

3) a)

$$\begin{aligned} S_I(B) = D \quad &\Leftrightarrow \text{I est le milieu de [BD]} \\ &\Leftrightarrow z_I = \frac{z_B + z_D}{2} \Leftrightarrow 2z_I = z_B + z_D \\ &\Leftrightarrow z_D = 2z_I - z_B \Leftrightarrow z_D = 2 \times 2 - (1+i) = 3 - i \end{aligned}$$

b) On sait que I est le milieu de [AC] et on a trouvé que I est aussi le milieu de [BD] donc ABCD est un parallélogramme

D'après la question b) de la question 2), on a trouvé que BA = BC donc ABCD est un losange.

Exercice 6

a) $z_1 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

$|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$

Donc $z_1 = 2\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

b) $z_2 = 3 - 3\mathrm{i}$

$|z_2| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

Donc $z_2 = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

c) $|-1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$

Donc $-1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Donc $\arg(-1+\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.

Par conséquent $\arg((-1+\mathrm{i})^5) = 5 \times \frac{3\pi}{4}\ (2\pi) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

Ainsi

$$(-1+i)^5 = \sqrt{2}^5\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

d) $|\sqrt{3} - \mathrm{i}| = 2$.

$$\sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{6}\right)$$

Donc $\arg(\sqrt{3} - \mathrm{i}) = -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$.

Par conséquent $\arg\left((\sqrt{3} - \mathrm{i})^4\right) = 4 \times \frac{-\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$

Ainsi

$$(\sqrt{3} - \mathrm{i})^4 = 2^4\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right) = 16\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right)$$

e).$\left|(\sqrt{2}-1)\mathrm{i}\right| = \sqrt{2}-1$; $\arg((\sqrt{2}-1)\mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}$

$|1-i| = \sqrt{2}$

$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

Donc $\arg(1-i) = \frac{-\pi}{4}$

Ainsi $|z| = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

Et $\arg(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Donc $z = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

f) $z = \left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)^6 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^6 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$

Par conséquent $\arg(z) = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi\ (2\pi) = 0\ (2\pi)$.

Donc $z = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0$.

g). $\arg(\mathrm{i}z) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \arg(i) + \arg(z) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.

Donc $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 7

1.

$|1+\mathrm{i}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Par conséquent $\arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

$$|1-\mathrm{i}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

Par conséquent $\arg(1-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

Donc $|z| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

Et $\arg(z) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

On pouvait également déterminer la forme algébrique de z (on obtient i) et ensuite déterminer le module et un argument.

2.

$|1+\mathrm{i}\sqrt{3}| = 2$

$$1+\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Par conséquent $\arg(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

$$|1+\mathrm{i}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Par conséquent $\arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

Donc $|z| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Et $\arg(z) = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}\ (2\pi)$

3.

$-\sqrt{2} = \sqrt{2}(\cos\pi + i\sin\pi)$ C'est un réel négatif!

Donc $\arg(-\sqrt{2}) = \pi\ (2\pi)$.

$|1+\mathrm{i}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Par conséquent $\arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$

Donc $|z| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

Et $\arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

Exercice 8

a) $z_1 = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{1-\mathrm{i}+\mathrm{i}\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}-\mathrm{i}(1-\sqrt{3})}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

c) $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

on a: $\begin{cases}\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}$ donc $\begin{cases}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

Exercice 9

1) $Z = \sqrt{2} - i\sqrt{6} = \sqrt{8}(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}i) = \sqrt{8}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$

$Z = \sqrt{8}(\cos(\frac{\pi}{3}) - i\sin(-\frac{\pi}{3}))$

$Z' = 1 + i = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$

$Z' = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$

2)a)

$Z.Z' = \sqrt{2}\sqrt{8}(\cos(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})) = 4(\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12}))$

b/ $Z.Z' = (\sqrt{2} - i\sqrt{6})(1+i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i - i\sqrt{6} + \sqrt{6} = \sqrt{2} + \sqrt{6} + (\sqrt{2} - \sqrt{6})i$

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3a/ $\frac{Z}{Z'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}(\cos(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})) = \frac{1}{2}(\cos(-\frac{7\pi}{12}) + i\sin(-\frac{7\pi}{12}))$

$\frac{Z}{Z'} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{(1+i)} = \frac{(\sqrt{2} - i\sqrt{6})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i - i\sqrt{6} - \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - \frac{i(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2}$

$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$